Universidad Simón Bolívar.
Matemáticas V (MA-2112).
Preparaduría n° 6.
christianlaya@hotmail.com ; @ChristianLaya

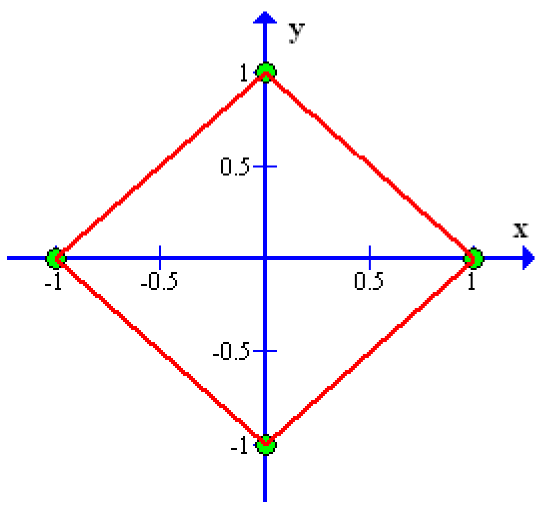
Integrales de línea y de trayectoria

1. Sea c el contorno de cuadro de vértices A(1,0); B(0,1); C(-1,0) y D(0,-1), orientada en sentido horario, calcule:

$$\int_c \frac{dx + dy}{|x| + |y|}$$

Solución:

Graficamos la curva c:



Tenemos entonces cuatro segmentos de recta que debemos parametrizar.

- **Segmento AB:**

$$y - 0 = \left(\frac{1 - 0}{0 - (-1)}\right)\left(x - (-1)\right) \Rightarrow y = x + 1, \qquad -1 \leq x \leq 0$$

Parametrizamos:

$$\overrightarrow{\phi_1}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t + 1 \end{pmatrix}, \qquad -1 \leq t \leq 0$$

- **Segmento BC:**

$$y - 0 = \left(\frac{0 - 1}{1 - 0}\right)(x - 1) \Rightarrow y = -x + 1, \qquad 0 \leq x \leq 1$$

Parametrizamos:

$$\overrightarrow{\phi_2}(t) = \binom{t}{-t+1}, \qquad 0 \le t \le 1$$

- **Segmento CD:**

$$y - 0 = \left(\frac{0-(-1)}{1-0}\right)(x-1) \Rightarrow y = x - 1, \qquad 0 \le x \le 1$$

Parametrizamos:

$$\overrightarrow{\phi_3}(t) = \binom{t}{t-1}, \qquad 0 \le t \le 1$$

- **Segmento DA:**

$$y - 0 = \left(\frac{-1-0}{0-(-1)}\right)\big(x-(-1)\big) \Rightarrow y = -x - 1, \qquad -1 \le x \le 0$$

Parametrizamos:

$$\overrightarrow{\phi_4}(t) = \binom{t}{-t-1}, \qquad -1 \le t \le 0$$

Evaluamos ahora el signo del valor absoluto:

	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
$\lvert x \rvert$	$-x$	x
$\lvert y \rvert$	$-y$	y

Procedemos a calcular las integrales:

- **Segmento AB:** $-1 \le x \le 0,\ 0 \le y \le 1$

$$\mathrm{F}(x,y) = \left(\frac{1}{y-x}, \frac{1}{y-x}\right), \qquad \overrightarrow{\phi_1}(t) = \binom{t}{t+1}, \qquad -1 \le t \le 0$$

$$\int_{C_1} F \cdot d\mathrm{S} = \int_{-1}^{0} \left\langle \binom{1}{1}, \binom{1}{1} \right\rangle dt = \int_{-1}^{0} 2dt = -2$$

Como se está recorriendo en sentido negativo (horario), cambia el signo de la integral.

$$\int_{C_1} F \cdot d\mathrm{S} = 2$$

- **Segmento BC:** $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1$

$$\mathrm{F}(x,y)=\left(\frac{1}{x+y},\frac{1}{x+y}\right),\qquad \overrightarrow{\phi_2}(t)=\begin{pmatrix}t\\-t+1\end{pmatrix},\qquad 0\le t\le 1$$

$$\int_{c_2} F\cdot d\mathrm{S}=\int_0^1 \left\langle\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right\rangle dt=\int_0^1 (0)dt=0$$

- **Segmento CD:** $0\le x\le 1,\ -1\le y\le 0$

$$\mathrm{F}(x,y)=\left(\frac{1}{x-y},\frac{1}{x-y}\right),\qquad \overrightarrow{\phi_3}(t)=\begin{pmatrix}t\\t-1\end{pmatrix},\qquad 0\le t\le 1$$

$$\int_{c_3} F\cdot d\mathrm{S}=\int_0^1 \left\langle\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\rangle dt=\int_0^1 2dt=2$$

Como se está recorriendo en sentido negativo (horario), cambia el signo de la integral.

$$\int_{c_2} F\cdot d\mathrm{S}=-2$$

- **Segmento DA:** $-1\le x\le 0,\ -1\le y\le 0$

$$\mathrm{F}(x,y)=\left(\frac{1}{-x-y},\frac{1}{-x-y}\right),\qquad \overrightarrow{\phi_4}(t)=\begin{pmatrix}t\\-t-1\end{pmatrix},\qquad -1\le t\le 0$$

$$\int_{c_4} F\cdot d\mathrm{S}=\int_0^1 \left\langle\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right\rangle dt=\int_0^1 (0)dt=0$$

Finalmente:

$$\int_c \frac{dx+dy}{|x|+|y|}=\int_{c_1} F\cdot d\mathrm{S}+\int_{c_2} F\cdot d\mathrm{S}+\int_{c_3} F\cdot d\mathrm{S}+\int_{c_4} F\cdot d\mathrm{S}=2+0-2+0=0$$

2. Conociendo que $\mathrm{F}(x,y,z)=(2xy+1,x^2+4y)$, calcule:

$$\int_c \mathrm{F}\cdot d\mathrm{S},\qquad c:(0,0)\to(1,1)$$

<u>**Solución:**</u>

La función F es de clase C^1 *(por ser composición de funciones polinómicas). Tenemos:*

$$\mathrm{F}(x,y)=\begin{pmatrix}\mathrm{P}(x,y)\\\mathrm{Q}(x,y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2xy+1\\x^2+4y\end{pmatrix}$$

Vemos que:

$$\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y} = 2x = \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x}$$

Lo que garantiza que el campo es conservativo y que existe una función potencial f tal que

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \mathrm{F}(x,y) = \begin{pmatrix} \mathrm{P}(x,y) \\ \mathrm{Q}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy+1 \\ x^2+4y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy+1 \\ x^2+4y \end{pmatrix}$$

Teniendo así dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy + 1 \ \ (\mathbf{1}), \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 + 4y \ \ (\mathbf{2})$$

Integramos **(2)** *con respecto a y:*

$$f(x,y) = \int (x^2+4y)dy = x^2y + y^2 + c(x) \Rightarrow f(x,y) = x^2y + y^2 + c(x) \ \ (\mathbf{3})$$

Derivamos **(3)** *con respecto a x:*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy + c'(x) \Rightarrow 2xy + 1 = 2xy + c'(x) \Rightarrow c'(x) = 1 \Rightarrow c(x) = x + c$$

Finalmente, la función pite

$$f(x,y) = x^2y + 2y^2 + x + c$$

Por definición de campo conservativo:

$$\int_c \mathrm{F}\cdot d\mathrm{S} = \int_c \nabla f \cdot d\mathrm{S} = f(1,1) - f(0,0) = 3 + c - c = 3$$

3. Conociendo que $\mathrm{F}(x,y) = (y^2e^{x+y} + 1, ye^{x+y}(y+2) + 1)$, calcule:

$$\int_c \mathrm{F}\cdot d\mathrm{S}, \qquad c: (0,0) \to (1,1)$$

<u>Solución</u>:

La función F es de clase C^1 *(por ser composición de polinomios). Vemos que:*

$$\mathrm{F}(x,y) = \begin{pmatrix} \mathrm{P}(x,y) \\ \mathrm{Q}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2e^{x+y} + 1 \\ ye^{x+y}(y+2) + 1 \end{pmatrix}$$

Vemos que:

$$\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y} = 2ye^{x+y} + y^2e^{x+y} = ye^{x+y}(y+2) = \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x}$$

Lo que garantiza que el campo es conservativo y que existe una función potencial f tal que

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \mathrm{F}(x,y) = \begin{pmatrix} \mathrm{P}(x,y) \\ \mathrm{Q}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2e^{x+y} + 1 \\ ye^{x+y}(y+2) + 1 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2e^{x+y} + 1 \\ ye^{x+y}(y+2) + 1 \end{pmatrix}$$

Tenemos dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y^2e^{x+y} + 1 \quad (\mathbf{1}), \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = ye^{x+y}(y+2) + 1 \quad (\mathbf{2})$$

Derivamos **(1)** *con respecto a x:*

$$f(x,y) = \int (y^2e^{x+y} + 1)dx = y^2e^{x+y} + x + c(y) \quad (\mathbf{3})$$

Derivamos **(3)** *con respecto a y:*

$$\frac{\partial f}{\partial y} = ye^{x+y}(2+y) + c'(y) \Longrightarrow ye^{x+y}(y+2) + 1 = ye^{x+y}(2+y) + c'(y)$$

$$\Longrightarrow c'(y) = 1 \Longrightarrow c(y) = y + c$$

Tenemos que la función potencial, es:

$$f(x,y) = y^2e^{x+y} + x + y + c$$

Por teorema del campo conservativo:

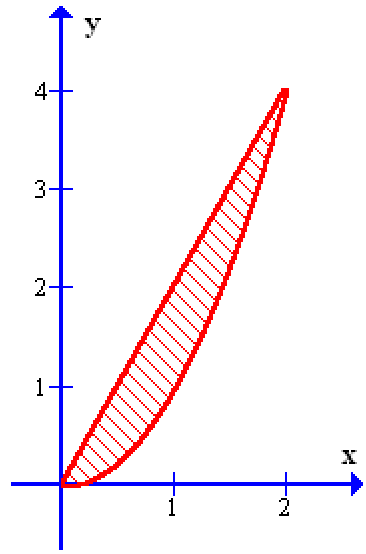
$$\int_c \mathrm{F}\cdot d\mathrm{S} = \int_c \nabla f \cdot d\mathrm{S} = f(1,1) - f(0,0) = e^2 + 2 + c - c = e^2 + 2$$

1. Sea la región $\mathrm{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \le y \le 2x\}$, calcule:

$$\iint_{\mathrm{D}} (x^3 + 4y)dxdy$$

<u>Solución</u>:

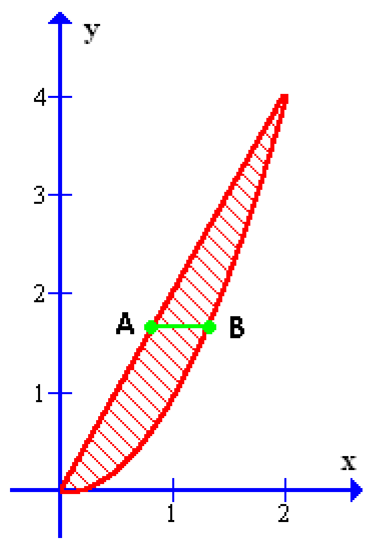
Graficamos la región:



Recordando que el sentido de integración es horizontal (dxdy) y que la variable "y" permanece fija (es la más externa). *Tenemos:*

$$y = 2x \Longrightarrow x = \frac{y}{2}, \qquad y = x^2 \Longrightarrow |x| = \sqrt{y} \Longrightarrow x = \sqrt{y} \quad (x > 0)$$

Definimos los puntos:



$$\mathrm{A} = \binom{x_A}{y_A} = \binom{x_A}{y} = \binom{y/2}{y}, \qquad \mathrm{B} = \binom{x_B}{y_B} = \binom{x_B}{y} = \binom{\sqrt{y}}{y}, \qquad 0 \le y \le 4$$

Finalmente:

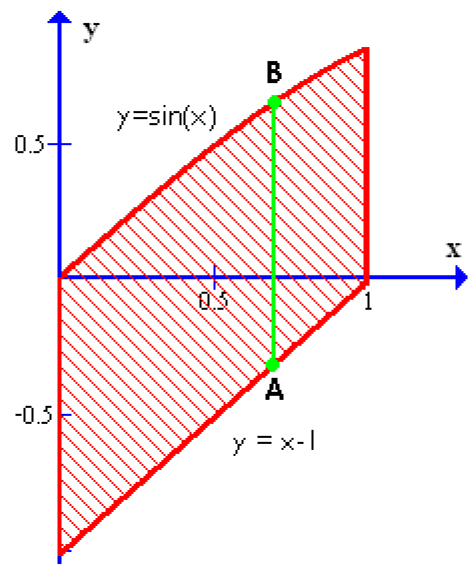
$$\iint\limits_{\mathrm{D}} (x^3 + 4y)dxdy = \int\limits_0^4 \left(\int\limits_{y/2}^{\sqrt{y}} (x^3 + 4y)dx \right) dy = \int\limits_0^4 \left(\left(\frac{1}{4}x^4 + 4xy \right|_{y/2}^{\sqrt{y}} \right) dy$$

$$= \int_0^4 \left(\frac{1}{4}y^2 + 4y^{3/2} - \frac{1}{64}y^4 - 2y^2\right) dy = \left(\frac{1}{12}y^3 + \frac{8}{5}y^{5/2} - \frac{1}{320}y^5 - \frac{2}{3}y^3\right|_0^4 = \frac{32}{3}$$

2. Sea la región $\mathrm{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - 1 \leq y \leq sen(x),\ 0 \leq x \leq 1\}$, calcule:

$$\iint_{\mathrm{D}} (x\cos(x))dydx$$

<u>**Solución**</u>**:**



Debemos integrar de forma vertical (dydx), es decir, mantenemos la variable "x" fija debido a que es la más externa. Definimos los puntos:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x-1 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ sen(x) \end{pmatrix}, \qquad 0 \leq x \leq 1$$

Tenemos entonces:

$$\iint_{\mathrm{D}} (x\cos(x))dydx = \int_0^1 \left(\int_{x-1}^{sen(x)} x\cos(x)dy \right) dx = \int_0^1 \big(x\cos(x)(sen(x) - x + 1)\big)dx$$

$$= \int_0^1 x\cos(x)sen(x)dx + \int_0^1 x\cos(x)dx - \int_0^1 x^2\cos(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 xsen(2x)dx + \int_0^1 x\cos(x)dx - \int_0^1 x^2\cos(x)\,dx$$

Al resolver las tres integrales mediante integración por partes, obtenemos que:

$$\iint_{D} (x\cos(x))dydx = \frac{1}{8}(-8 + 16sen(1) + sen(2) - 8\cos(1) - 2\cos(2))$$

Se agradece la notificación de errores

Christian Laya